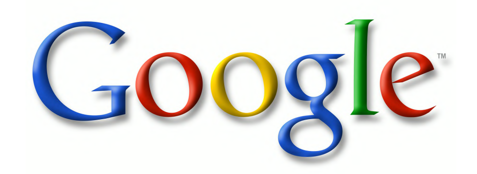


ÜBER
EINIGE AUFGABEN DER STATIK
WELCHE AUF GLEICHUNGEN DER CLAPEYRONSCHEN ART FÜHREN.

VON

HEINRICH F. B. MÜLLER-BRESLAU

PROFESSOR AN DER TECHN. HOCHSCHULE
IN BERLIN
ORDENTL. MITGLIED DER KÖNIGL. AKADEMIE
DES BAUWESENS.

(SONDERDRUCK AUS DER ZEITSCHRIFT
FÜR BAUWESEN, 1891.)

BERLIN 1891.
VERLAG VON WILHELM ERNST U. SOHN
(GROPIUS'SCHE BUCHHANDLUNG).

und des Trapezes $AA'B'B$, welches letztere durch die Stützenmomente $\overline{AA'} = M_{m-1}$, $\overline{BB'} = M_m$ bestimmt ist, und in gleicher Weise ist die Momentenfläche des Theiles l_{m+1}

$$= \text{Fläche } B'RC' - \text{Fläche } BB'C'C.$$

Die einfachen, den Einzelbalken l_m und l_{m+1} entsprechenden Momentenlinien $A'SB'$ und $B'RC'$ sehen wir als gegeben an; sie lassen sich in bekannter Weise berechnen oder als Seilzüge zeichnen.

Für die Geraden $A'B'$ und $B'C'$ führen wir in der Folge die Bezeichnungen g_m und g_{m+1} ein, und den von sämtlichen Geraden g gebildeten Linienzug, dessen den Stützpunkten entsprechende Ordinaten gleich den Stützenmomenten sind, nennen wir, der Kürze wegen, das M-Polygon.

Wir nehmen eine beliebige senkrechte Belastung an, welche in einer Ebene wirkt, die den Querschnitt in einer Hauptachse schneidet, und setzen voraus, es habe sich, infolge ungleicher Senkungen der Stützen, der Punkt m um die senkrechte Strecke δ_m gegen die Verbindungsgerade der Punkte $m-1$ und $m+1$ verschoben, Abb. 2. Auch denken wir den Balken ungleichmäfsig erwärmt, so zwar, dafs sich die dem spannungslosen Anfangszustande entsprechende Temperatur für den untersten Punkt des Querschnittes um t_1, für den obersten um t_2 erhöht habe. Innerhalb des Querschnittes ändere sich t nach dem Gesetze:

$$t = t_0 + \Delta t \frac{v}{h},$$

wobei

$$\Delta t = t_1 - t_2,$$

$$t_0 = t_1 \frac{e_2}{h} + t_2 \frac{e_1}{h};$$

e_1 und e_2 sind die Abstände der äufsersten Querschnittspunkte von der wagerechten Schwerachse des Schwerpunktes und h ist die Höhe des Querschnittes. Abb. 3. Bedeutet dann

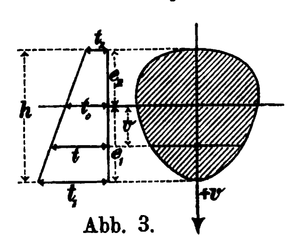


Abb. 3.

E die überall gleich angenommene Elasticitätsziffer,

J das überall gleich angenommene Querschnitts-Trägheitsmoment,

F_m den Inhalt der einfachen Momentenfläche $A'SB'$ des Theiles l_m,

ξ_m den Abstand des Schwerpunkts der Fläche F_m vom Stützpunkt $m-1$,

ξ'_m den Abstand des Schwerpunkts der Fläche F_m vom Stützpunkt m,

ε das Verlängerungsverhältniſs für eine Temperaturerhöhung um 1^0 Cels. ($\varepsilon = 0{,}000\,012$ für Schmiedeeisen),

so besteht, bei überall gleichen $\varDelta t$, t und ε, zwischen den drei Stützenmomenten M_{m-1}, M_m, M_{m+1} die Beziehung:

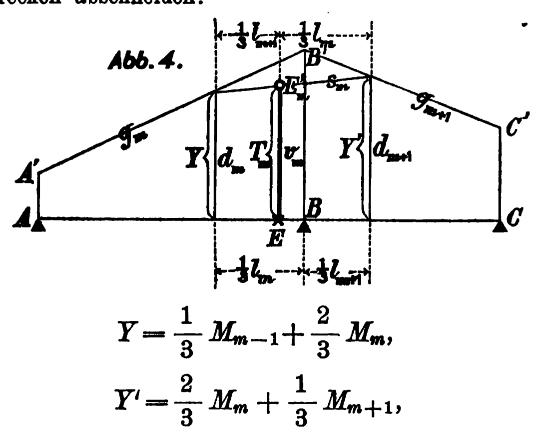
$$(1) \quad M_{m-1} l_m + 2 M_m (l_m + l_{m+1}) + M_{m+1} l_{m+1} = N_m,$$[1]

wobei

$$(2) \quad N_m = \frac{6 F_m \xi_m}{l_m} + \frac{6 F_{m+1} \xi'_{m+1}}{l_{m+1}} - 6 EJ\delta_m \frac{l_m + l_{m+1}}{l_m l_{m+1}} + 3 \varepsilon EJ \frac{l_m + l_{m+1}}{h} \varDelta t$$

eine gegebene Gröſse ist.

Da nun die Geraden g_m und g_{m+1} auf den dem Stützpunkte m benachbarten Drittelsenkrechten d_m und d_{m+1} (Abb. 4) die Strecken abschneiden:



$$Y = \frac{1}{3} M_{m-1} + \frac{2}{3} M_m,$$

$$Y' = \frac{2}{3} M_m + \frac{1}{3} M_{m+1},$$

so läſst sich die Gleichung (1) nach Theilung durch 3 auch schreiben:

$$Y l_m + Y' l_{m+1} = \frac{N_m}{3}.$$

---

1) Je nachdem sich die Momente M aus den nach Art der Gleichung (1) gebildeten Bedingungen positiv oder negativ ergeben, werden sie beim Zeichnen des M-Polygons von der Balkenachse aus nach oben oder nach unten aufgetragen.

Die Verbindungsgerade der Endpunkte der Ordinaten Y und Y' bezeichnen wir in der Folge durch s_m; sie trifft die zu dem Stützpunkte m gehörige verschränkte Stützen-Senkrechte v_m im Punkte E'_m, und man findet für die Strecke $E_m E'_m$ leicht den Werth:

$$\overline{E_m E'_m} = \frac{Y l_m + Y' l_{m+1}}{l_m + l_{m+1}} = \frac{N_m}{3(l_m + l_{m+1})}.$$

Führt man also, der Kürze wegen, die Bezeichnung ein:

$$\frac{N_m}{3(l_m + l_{m+1})} = T_m, \tag{3}$$

so erhält man den Satz:

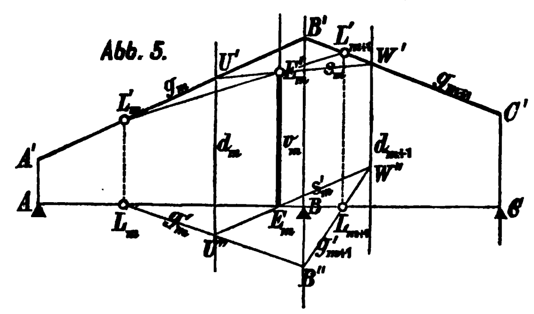
Die Gerade s_m mufs auf der zum Stützpunkte m gehörigen verschränkten Stützen-Senkrechten v_m das gegebene Moment T_m abschneiden.

Der Werth T_m ist durch die Gleichung bestimmt:

$$T_m = \frac{2}{l_m + l_{m+1}} \left[\frac{F_m \xi_m}{l_m} + \frac{F_{m+1} \xi'_{m+1}}{l_{m+1}} \right] - \frac{2EJ\delta_m}{l_m l_{m+1}} + \frac{\varepsilon EJ \Delta t}{h}; \tag{4}$$

wie man ihn am bequemsten darstellt, soll später erörtert werden. Zunächst zeigen wir, in welcher Weise mit Hülfe unseres Satzes aus den Momenten T_m die Stützenmomente gefunden werden können.

Dazu werde angenommen, es sei der Schnittpunkt L'_m der Geraden g_m mit einer festen Senkrechten $L_m L'_m$ gegeben. Abb. 5. Denkt man durch diesen Punkt L'_m verschiedene Ge-



raden g_m gelegt, so kann man zu jeder derselben die zugehörige Gerade g_{m+1} finden, indem man von dem Punkte U',

in welchem die g_m von der d_m geschnitten wird, durch den festen Punkt E'_m die Gerade s_m zieht und mit der Senkrechten d_{m+1} in W' zum Schnitte bringt. Durch die beiden Punkte B' und W' ist die gesuchte Gerade g_{m+1} gegeben.

Alle die Geraden g_{m+1}, welche in dieser Weise zu verschiedenen gegebenen Geraden g_m bestimmt werden können, schneiden sich in einem Punkte L'_{m+1}, welcher auf der durch die Punkte L'_m und E'_m gehenden Geraden liegt und gefunden wird, indem zu einer beliebigen g_m die zugehörige g_{m+1} gezeichnet und mit der Geraden $L'_m E'_m$ zum Schnitte gebracht wird.[1])

Uebersichtlicher aber verfährt man, wenn man, von dem senkrecht unter L'_m gelegenen Punkte L_m ausgehend, zunächst auf die Lage von L_{m+1} schliefst. Man legt durch L_m die beliebige Gerade g'_m, welche die Senkrechten d_m und $B'B$ bezw. in U'' und B'' schneidet, zieht hierauf durch U'' und E_m die Gerade s'_m bis zu ihrem Schnittpunkte W'' mit der Senkrechten d_{m+1} und verbindet W'' mit B'' durch die Gerade g'_{m+1}. Der Punkt L_{m+1}, in welchem die Balkenachse ABC von der g'_{m+1} getroffen wird, liegt dann senkrecht unter L'_{m+1}.

Mit Hülfe der vorstehenden Entwicklungen ist man im Stande, das M-Polygon zu zeichnen, sobald zwei Punkte desselben gegeben sind.

Sind z. B. die Punkte L'_1 und R'_4 in Abb. 6 Punkte des M-Polygons des Balkens AB, so schliefst man aus der Lage des Punktes L_1 in der vorhin beschriebenen Weise auf die Lage von L_2, hierauf auf die von L_3 und L_4 und zeichnet den Linienzug $L'_1 L'_2 L'_3 L'_4$, dessen Seiten auf den verschränkten Stützen-Senkrechten v_1, v_2, v_3 die gegebenen Strecken T_1, T_2, T_3 abschneiden. Nun legt man durch L'_4 und R'_4 die Gerade g_4 und durch die Punkte L'_3, L'_2, L'_1 die übrigen

---

1) Es folgt dies aus dem bekannten Satze der Geometrie der Lage: Bewegen sich die Ecken (U', W', B') eines Dreiecks auf drei Strahlen (d_m, d_{m+1} und BB') eines Strahlenbüschels, und gehen hierbei zwei Seiten (g_m und s_m) des Dreiecks durch feste Punkte (L'_m und E'_m), so geht auch die dritte Seite (g_{m+1}) durch einen festen Punkt (L'_{m+1}), welcher mit den beiden ersten in einer Geraden liegt.

Seiten g_3, g_2, g_1 des gesuchten (in Abb. 6 durch Schraffirung hervorgehobenen) M-Polygons.

Um eine scharfe Zeichnungsprobe zu erhalten, wiederhole man das beschriebene Verfahren in der Weise, dafs man nicht

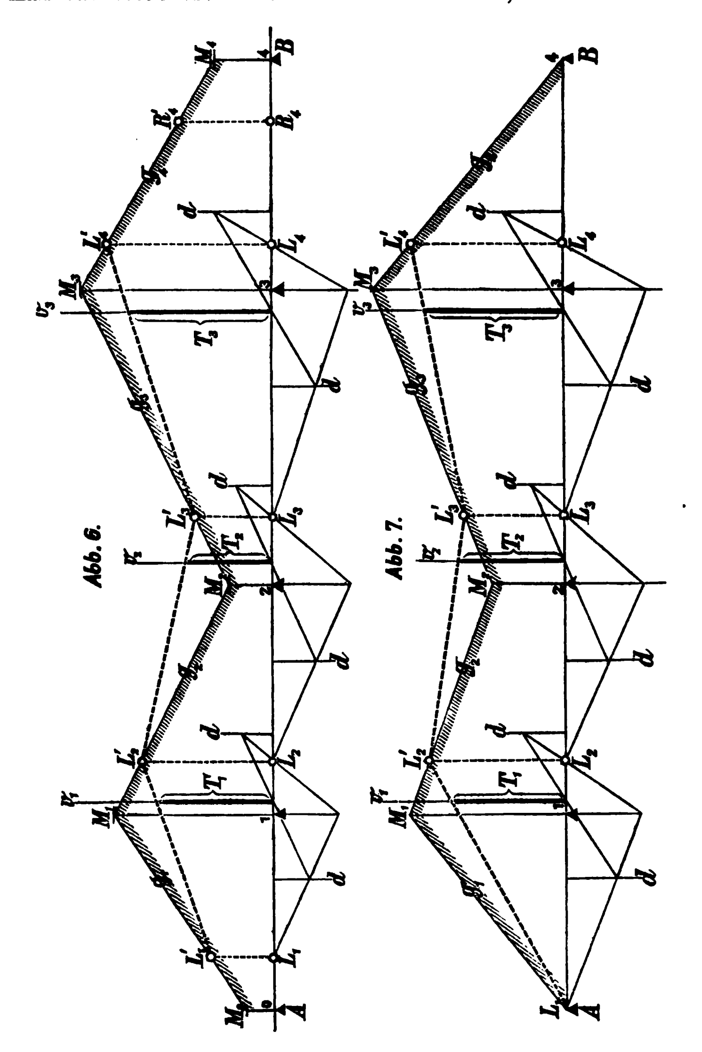


Abb. 6.

Abb. 7.

von L_1, sondern von dem in der letzten Oeffnung gegebenen Punkte R_4 ausgeht, in den vorhergehenden Oeffnungen Punkte R_3, R_2, R_1 auf dieselbe Weise bestimmt, wie vorhin die Punkte

L_2, L_3, L_4, hierauf durch die Endpunkte der Ordinaten T_4, T_3, T_2, T_1 den Linienzug $R'_4 R'_3 R'_2 R'_1$ führt, dessen Ecken R'_4, R'_3, R'_2, R'_1 lothrecht über den entsprechenden Punkten R liegen, und schliefslich g_1 durch L'_1 und R'_1 legt.

Es ist leicht einzusehen, dafs die Punkte L und R mit den bereits von Culmann und Mohr in anderer Weise benutzten Festpunkten übereinstimmen. Zu diesem Zwecke nehme man nur ein einziges Feld des Balkens belastet an und streiche die von den Temperaturänderungen und Stützensenkungen abhängigen Glieder der Werthe T. Dann gehen die Geraden g der links bezw. rechts von dem belasteten Theile gelegenen Felder durch die Punkte L bezw. R.

Wir beschränken uns darauf, unser Verfahren auf die beiden folgenden Fälle anzuwenden.

I. Der Balken ist an den Enden gestützt und liegt dort frei auf. Abb. 7.

Die Biegungsmomente für die Balken-Querschnitte über den Endstützen sind $= 0$. Die Punkte L'_1 und L_1 fallen mit dem Stützpunkte A zusammen. Nach Zeichnen des Linienzuges $A\, L'_2\, L'_3\, L'_4$ ist die Gerade g_4 durch die beiden Punkte L'_4 und B bestimmt.

II. Der Balken ist an den Enden unter den gegebenen Winkeln τ_0 und τ_n eingespannt.

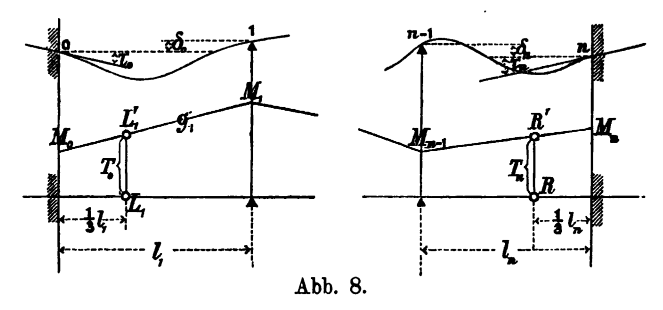


Abb. 8.

Bezeichnet man mit δ_0 die senkrechte Verschiebung des Stützpunktes 0 gegen den Stützpunkt 1, Abb. 8, so besteht die Gleichung:

$$(5)\quad (2M_0 + M_1)l_1 = \frac{6F_1\xi'_1}{l_1} - \frac{6EJ(\delta_0 + l_1\tau_0)}{l_1} + \frac{3\varepsilon EJ l_1 \varDelta t}{h},$$

welche sich umformen läfst in

$$(6) \qquad \frac{2}{3} M_0 + \frac{1}{3} M_1 = T_0 ,$$

wobei

$$(7) \qquad T_0 = \frac{2 F_1 \xi'_1}{l_1^2} - \frac{2 EJ(\delta_0 + l_1 \tau_0)}{l_1^2} + \frac{\varepsilon EJ \Delta t}{h} .$$

Nun ist im Abstande $\frac{1}{3} l_1$ vom Stützpunkte 0 die Ordinate der Geraden g_1:

$$\overline{L_1 L'_1} = \frac{2}{3} M_0 + \frac{1}{3} M_1 ,$$

und es folgt mithin $\overline{L_1 L'_1} = T_0$, sodafs im ersten Felde des Balkens ein Punkt des M-Polygons von vornherein bekannt ist. In gleicher Weise kann man im $n$ten Felde einen Punkt R' der Geraden g_n finden; man braucht nur im Abstande $\frac{1}{3} l_n$ vom Stützpunkte n die Ordinate

$$(8) \qquad \overline{RR'} = T_n = \frac{2 F_n \xi_n}{l_n^2} - \frac{2 EJ(\delta_n + l_n \tau_n)}{l_n^2} + \frac{\varepsilon EJ \Delta t}{h}$$

aufzutragen. Durch die Punkte L'_1 und R' ist aber nach Vorstehendem das M-Polygon bestimmt. Vgl. Abb. 6.

§ 2. Fortsetzung. Ermittelung des Momentes T_m.

Es empfiehlt sich, die von den Verschiebungen der Stützen und von der Temperaturänderung abhängigen Theile des Momentes T_m stets zu rechnen, den von der Belastung herrührenden Theil

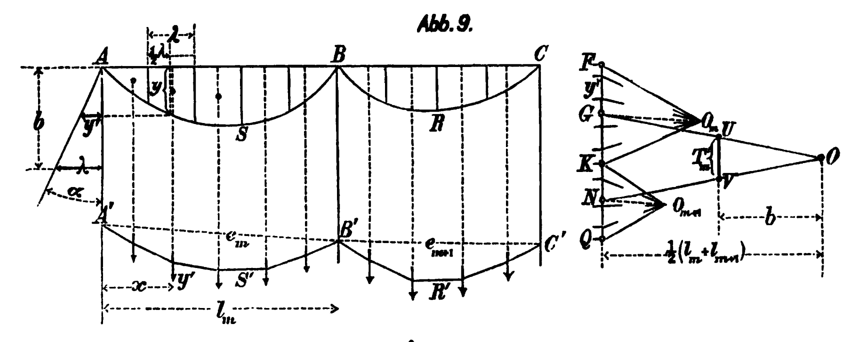
$$T' = \frac{2}{l_m + l_{m+1}} \left(\frac{F_m \xi_m}{l_m} + \frac{F_{m+1} \xi'_{m+1}}{l_{m+1}} \right)$$

hingegen nur dann, wenn es sich um einfachere Angriffsweisen (z. B. um gleichmäfsig über ganze Oeffnungen vertheilte Lasten) handelt.

Für minder einfache Belastungsfälle bestimme man die statischen Momente $F_m \xi_m$ und $F_m \xi'_{m+1}$ mit Hülfe von Seillinien, etwa in folgender Weise.

Man zerlege die einfachen Momentflächen ASB und BRC in Streifen, deren mittlere Höhen mit y und deren Breiten mit λ bezeichnet werden mögen. Abb. 9. λ wähle man innerhalb der einzelnen Oeffnungen wenn möglich gleich grofs. Jeden Streifen verwandle man in ein Rechteck mit der gleichen, beliebig gewählten Breite b und der Höhe y'. Es ist dann $y'b = y\lambda$.

Abb. 9.



Die Ermittlung von $y' = y\frac{\lambda}{b}$ erfolgt mit Hülfe eines Winkels α, der durch $tg\alpha = \frac{\lambda}{b}$ gegeben ist. Ist dies geschehen, so fasse man die y' als senkrechte Kräfte auf, zeichne mit beliebigen Polweiten die Seilpolygone $A'S'B'$ und $B'R'C'$, trage die Schlufslinien e_m und e_{m+1} ein und ziehe von den Polen aus zu diesen Linien die Parallelen $O_m G$ und $O_{m+1} N$. Es ist dann nach einem bekannten Satze der graphischen Statik:

$$\text{Strecke } \overline{GK} = \frac{\sum\limits_0^{l_m} y'x}{l_m} = \frac{\sum\limits_0^{l_m} y\lambda x}{l_m b} = \frac{F_m \xi_m}{l_m b}.$$

Ebenso folgt:

$$\overline{KN} = \frac{F_{m+1}\xi'_{m+1}}{l_{m+1} b},$$

weshalb sich ergiebt:

$$\overline{GN} = \overline{GK} + \overline{KN} = \frac{1}{b}\left(\frac{F_m \xi_m}{l_m} + \frac{F_{m+1}\xi'_{m+1}}{l_{m+1}}\right)$$

$$= \frac{T'_m (l_m + l_{m+1})}{2b}$$

und hieraus: $$T'_m = \frac{2b}{l_m + l_{m+1}} \overline{GN}.$$

Bestimmt man nun im Abstande $\frac{1}{2}(l_m + l_{m+1})$ von der Senkrechten FQ einen beliebigen Punkt O, verbindet O mit G und N durch Geraden und trägt zwischen diese im Abstande b von O die Senkrechte UV ein, so ist

$$\overline{UV} = \frac{2b}{l_m + l_{m+1}} \overline{GN} = T'_m.$$

§ 3. Durchgehender Träger mit veränderlichem Querschnitte.

Das in den §§ 1 und 2 entwickelte Verfahren zur Bestimmung des M-Polygons läfst sich auch bei durchgehenden Trägern mit veränderlichem Ouerschnitte anwenden. Wir begnügen uns, wegen der geringeren Bedeutung dieses allgemeineren Falles, mit der Mittheilung der Ergebnisse und überlassen es dem Leser, sich dieselben mit Hülfe der bekannten Elasticitätsgleichungen abzuleiten.[1])

Ueber den beiden Oeffnungen l_m und l_{m+1} zeichne man ein Dreieck AB_1C (Abb. 10a), dessen Höhe gleich der in beliebigem Mafsstabe aufzutragenden Zahl 1 ist, und dessen Spitze senkrecht über dem Stützpunkte B liegt. Hierauf multiplicire man die Ordinaten y der Geraden AB_1 und B_1C mit $\frac{J_c}{J}$, wobei J das Trägheitsmoment für denjenigen Querschnitt bedeutet, zu welchem die Ordinate y gehört, während J_c ein beliebiges, aber festes Trägheitsmoment vorstellt. Indem man nun die Werthe $y\frac{J_c}{J}$ als Ordinaten aufträgt, erhält man die in Fig. 10a schraffirte Fläche, deren über l_m und l_{m+1} gelegene Theile beziehungsweise die Inhalte

$$\mathfrak{F}_m = \varkappa_m l_m \text{ und } \mathfrak{F}_{m+1} = \varkappa_{m+1} l_{m+1}$$

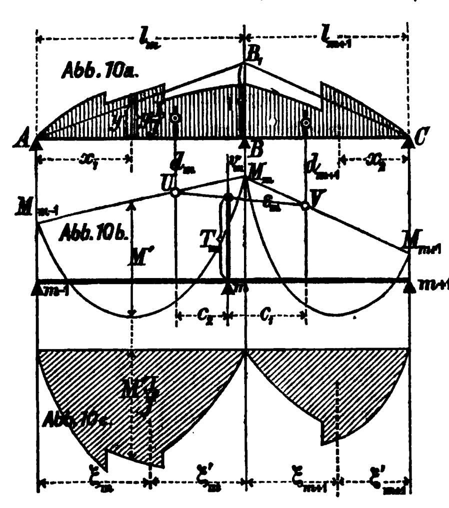
1) Mit sehr wenigen Ausnahmen ist es bekanntlich statthaft, das veränderliche Querschnitts-Trägheitsmoment durch einen festen Mittelwerth desselben zu ersetzen.

haben mögen, und deren senkrechte Schwerachsen mit d_m und d_{m+1} bezeichnet werden sollen.

$\varkappa_m$ und $\varkappa_{m+1}$ sind Zahlen, welche z. B. im Falle $\frac{J_c}{J} = \text{Const.} = 1$ den Werth $\frac{1}{2}$ annehmen.

Trägt man nun eine Senkrechte v_m ein, deren Abstände c_1 und c_2 von d_{m+1} und d_m der Bedingung

$$c_1 : c_2 = \varkappa_m \, l_m : \varkappa_{m+1} \, l_{m+1}$$



genügen, und bringt die Senkrechten d_m und d_{m+1} mit dem M-Polygone in U und V zum Schnitte, Abb. 10b, so mufs die Gerade s_m, welche die beiden Punkte U und V verbindet, auf der Senkrechten v_m ein bestimmtes Moment T_m, dessen Werth wir sogleich angeben werden, abschneiden. Mit Hülfe dieses Gesetzes ist man im Stande, das M-Polygon in der im § 1 beschriebenen Weise zu ermitteln. An Stelle der früher benutzten Drittelsenkrechten d und verschränkten Stützensenkrechten v treten die oben bestimmten Linien d und v.

Das Moment T_m zerlegen wir in drei Theile. Wir schreiben

$$T_m = T'_m + T''_m + T'''_m,$$

wobei T'_m den von der Belastung abhängigen Theil von T_m vorstellt,

T''_m den von den Stützenverschiebungen abhängigen Theil,

T'''_m den von der Temperaturänderung abhängigen Theil.

Um T'_m zu bestimmen, multiplicire man die Ordinaten M' der einfachen Momentenlinien mit den für die verschiedenen

Querschnitte verschieden grofsen Werthen $\frac{J_c}{J}$ und trage die Gröfsen $M' \frac{J_c}{J}$ als Ordinaten auf. Es ergeben sich die in der Fig. 10c schraffirten Flächen, welche man die verzerrten einfachen Momentenflächen zu nennen pflegt. Ihre senkrechten Schwerachsen mögen von den benachbarten Stützpunkten die Abstände ξ_m, ξ'_m und ξ_{m+1}, ξ'_{m+1} haben; ihre Flächeninhalte seien F_m und F_{m+1}. Dann ist:

$$(9) \qquad T'_m = \frac{1}{\varkappa_m l_m + \varkappa_{m+1} l_{m+1}} \left(\frac{F_m \xi_m}{l_m} + \frac{F_{m+1} \xi'_{m+1}}{l_{m+1}} \right),$$

welcher Ausdruck nach der im § 2 gegebenen Anleitung auf zeichnerischem Wege gefunden werden kann. Man hat nur nöthig, die einfachen Momentenflächen durch die verzerrten Flächen zu ersetzen und in Fig. 9 die Entfernung des Punktes 0 von der Senkrechten FQ gleich $\varkappa_m l_m + \varkappa_{m+1} l_{m+1}$ anstatt $= \frac{1}{2}(l_m + l_{m+1})$ zu machen.

Weiter findet man

$$(10) \qquad T''_m = - \frac{E J_c \delta (l_m + l_{m+1})}{l_m l_{m+1} (\varkappa_m l_m + \varkappa_{m+1} l_{m+1})}$$

und

$$(11) \qquad T'''_m = \frac{\varepsilon E J_c}{\varkappa_m l_m + \varkappa_{m+1} l_{m+1}} \left(\int_0^{l_m} \frac{\Delta t}{h} \frac{x_1}{l_m} d x_1 + \int_0^{l_{m+1}} \frac{\Delta t}{h} \frac{x_2}{l_{m+1}} d x_2 \right),$$

wobei bezüglich der Bezeichnungen x_1 und x_2 auf Fig. 10a verwiesen wird. Für $\frac{\Delta t}{h}$ darf in der Regel innerhalb einer Oeffnung ein Mittelwerth gesetzt werden,

etwa der Werth $\left(\frac{\Delta t}{h}\right)_m$ für den Theil l_m

und der Werth $\left(\frac{\Delta t}{h}\right)_{m+1}$ für den Theil l_{m+1}.

Es ergiebt sich dann:

$$(12) \qquad T'''_m = \frac{\varepsilon E J_c}{2(\varkappa_m l_m + \varkappa_{m+1} l_{m+1})}\left[\left(\frac{\Delta t}{h}\right)_m l_m + \left(\frac{\Delta t}{h}\right)_{m+1} l_{m+1}\right].$$

Bei stark veränderlichem $\frac{\Delta t}{h}$ bestimme man die in der Gleichung (11) stehenden Integrale auf zeichnerischem Wege (als statische Momente von Gewichten $\frac{\Delta t}{h}\, dx$) oder mittels des Momentenplanimeters oder mit Hülfe der Simpson'schen Formel.

§ 4. Biegungsspannungen in Fachwerken, deren Gurtungen mit einander vernietet, und deren Wandglieder gelenkartig befestigt sind.

Zwischen den in drei aufeinanderfolgenden Knoten $(m-1)$, m, $(m+1)$ einer Gurtung wirksamen Biegungsmomenten M_{m-1}, M_m, M_{m+1} besteht bei Vernachlässigung der an den Gelenken auftretenden Reibungswiderstände und unter der Voraussetzung, dafs sich die in einem Knoten zusammentreffenden Stabachsen in einem Punkte schneiden, die Beziehung

$$(13) \qquad M_{m-1} l_m + 2 M_m (l_m + l_{m+1}) + M_{m+1} l_{m+1} = N_m,$$

wo
$$l_m = s_m \frac{J_c}{J_m}, \quad l_{m+1} = s_{m+1} \frac{J_c}{J_{m+1}}$$

und, falls sämtliche Lasten in den Knotenpunkten angreifen,

$$(14) \qquad N_m = 6 J_c E \Delta \vartheta_m.$$

Hierbei bedeuten:

s_m und s_{m+1} die Längen der dem Knotenpunkte m benachbarten Gurtstäbe,

J_m und J_{m+1} die Trägheitsmomente der Querschnitte dieser Stäbe, bezogen auf die Schwerachsen senkrecht zur Ebene des Fachwerks,

ϑ_m den Randwinkel bei m, Abb. 11,

J_c ein beliebiges festes Querschnittsträgheitsmoment.

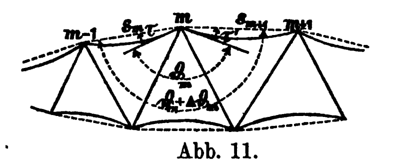


Abb. 11.

Die Momente sind positiv angenommen, sobald die Gurtstäbe (wie in Abb. 11) nach innen gebogen werden.

Die Entwicklung der Gleichungen (13) und (14) gab der Verfasser bereits (einschliefslich der Berechnung der $\Delta\vartheta$) in einer Abhandlung: „Zur Theorie der Biegungsspannungen in Fachwerksträgern“, welche in der Allgemeinen Bauzeitung, Wien, 1885 veröffentlicht ist.[1]) In dieser Arbeit ist auch der Werth von N_m für den Fall angegeben, dafs sich die in einem Knoten m zusammentreffenden Stabachsen nicht in einem und demselben Punkte schneiden, und schliefslich ist gezeigt worden, wie man sowohl das Eigengewicht der Gurtstäbe als auch den Einflufs der Durchbiegungen dieser Stäbe auf die Biegungsmomente berücksichtigen kann.

Der Umstand, dafs die Gleichung (13) von der Clapeyronschen Art ist, veranlafste den Verfasser bereits in der genannten Abhandlung, an Stelle der gebrochenen Gurtung einen ursprünglich geraden, über mehrere Stützen reichenden Balken von überall gleichem Querschnitte zu betrachten, dessen Felder die Längen l_1, l_2, l_3, $\ldots l_m \ldots$ haben und dessen Momentenpolygon durch die Ordinaten $\ldots M_{m-1}$, M_m, $M_{m+1} \ldots$ gegeben ist. Derselbe soll in der Folge der stellvertretende Balken genannt werden.

---

1) Die Ausschlagwinkel τ und τ' (Abb. 11) sind bekanntlich

$$\tau = \frac{s_m}{6EJ_m}(M_{m-1} + 2M_m)\ ;\ \tau' = \frac{s_{m+1}}{6EJ_{m+1}}(M_{m+1} + 2M_m).$$

Setzt man $\tau + \tau' = \Delta\vartheta_m$, so erhält man Gleichung (13). Die Winkel ϑ setzen sich aus Dreieckswinkeln zusammen, und die Aenderung eines Dreieckswinkels α_1 (Abb. 12) kann mittels der Gleichung

$$E\Delta\alpha_1 = (\sigma_1 - \sigma_2)\operatorname{cotg}\alpha_3 + (\sigma_1 - \sigma_3)\operatorname{cotg}\alpha_2$$

berechnet werden, wenn σ_1, σ_2, σ_3 die in den drei Seiten herrschenden Spannungen bedeuten. Dabei ist $\sigma = \frac{S}{F}$, wobei S die Spannkraft, F die Querschnittsfläche des fraglichen Stabes bedeutet. Es ist zulässig, die S unter der Voraussetzung zu berechnen, dafs auch die Gurtstäbe in Gelenken aneinanderhängen. Die Querschnittsflächen sind voll (d. h. ohne Abzug für Nietschwächung) einzuführen.

Abb. 12.

Zur Darstellung des M-Polygons benutzen wir nun das im § 1 entwickelte Verfahren, welches schneller und übersichtlicher zum Ziele führt, als der vom Verfasser in seiner früheren Arbeit angegebene Weg. Das Moment T_m wird

$$(15) \qquad T_m = \frac{N_m}{3(l_m + l_{m+1})} = \frac{2 J_c E \Delta \vartheta_m}{l_m + l_{m+1}}.$$

Wir betrachten die folgenden Fälle:

I. Fachwerk mit Endständern.

Wird das Momentenpolygon für die obere Gurtung des in Abb. 13 dargestellten Trägers mit 4 Feldern gesucht, so berechne man die Winkeländerungen $\Delta\vartheta_1$, $\Delta\vartheta_2$, $\Delta\vartheta_3$, hierauf die Momente

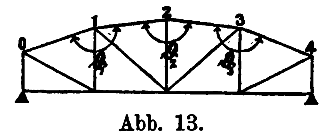


Abb. 13.

$$T_1 = \frac{2 E J_c \Delta \vartheta_1}{l_1 + l_2} \text{ bis } T_3 = \frac{2 E J_c \Delta \vartheta_3}{l_3 + l_4}$$

und zeichne den stellvertretenden Balken mit den Feldlängen

$$l_1 = s_1 \frac{J_c}{J_1} \text{ bis } l_4 = s_4 \frac{J_c}{J_4}.$$

Nach Eintragung der Drittelsenkrechten d und verschränkten Drittelsenkrechten v (vgl. Abb. 7), bestimme man, von dem mit Stützpunkt 0 zusammenfallenden Festpunkte L_1 ausgehend, die Festpunkte L_2 bis L_4 und zeichne den Linienzug L'_1 L'_2 L'_3 L'_4, dessen Seiten auf den Senkrechten v_1, v_2, v_3, die Momente T_1, T_2, T_3 abschneiden, worauf durch den Stützpunkt 4 und durch L'_4 die Gerade g_4 und schliefslich der aus den Geraden g_3 bis g_1 (welche durch L'_3, L'_2 und 0 gehen müssen) bestehende Linienzug gefunden werden kann. Die Geraden g sind die Seiten des gesuchten M-Polygons.

In gleicher Weise kann das M-Polygon für die untere Gurtung gefunden werden.

Auch für den Fall einer zusammenhängenden oberen und unteren Gurtung führt das beschriebene Verfahren zum Ziele, vorausgesetzt, dafs mindestens ein Knotenpunktsmoment $= 0$ ist.

II. Es ist kein Knotenpunktsmoment = 0. Die Senkrechte durch die Mitte des Trägers ist in Bezug auf Trägerform und Belastung eine Symmetrieachse.

1. Fall. Die Symmetrieachse enthält keinen Knotenpunkt. Die Bezifferung der Knotenpunkte ist aus Abb. 14 zu ersehen. Zwischen den drei aufeinander folgenden Momenten M_0, M_1, M_2 (von denen die beiden ersteren gleich grofs sind) besteht die Beziehung

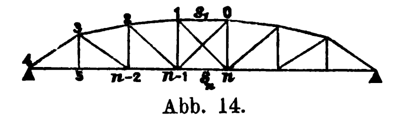


Abb. 14.

$$M_0 l_1 + 2 M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_1 = N_1,$$

welche sich auch schreiben läfst:

$$2 M_1 (l'_1 + l_2) + M_2 l_2 = N_1,$$

wo $l'_1 = 1{,}5\, l_1$; und ebenso ergiebt sich (mit $l'_n = 1{,}5\, l_n$)

$$M_{n-2}\, l_{n-1} + 2 M_{n-1} (l_{n-1} + l'_n) = N_{n-1}.$$

Diese Gleichungen lassen sich nun als die 1te bezw. $(n-1)$te Clapeyronsche Bedingung eines an den Enden frei aufliegenden, durchgehenden Balkens $0\ 1\ 2 \ldots (n-1)\, n$ deuten. Die Längen der beiden äufsersten Felder sind:

$$l'_1 = 1{,}5\, s_1 \frac{J_c}{J_1} \quad \text{und} \quad l'_n = 1{,}5\, s_n \frac{J_c}{J_n};$$

für die übrigen l gilt die Gleichung

$$l_m = s_m \frac{J_c}{J_m}.$$

Nach Berechnung von $\varDelta \vartheta_1$ bis $\varDelta \vartheta_{n-1}$ und

$$T_1 = \frac{2 J_c E \varDelta \vartheta_1}{l'_1 + l_2} \quad \text{bis} \quad T_{n-1} = \frac{2 J_c E \varDelta_{n-1}}{l_{n-1} + l'_n}$$

wird die Bestimmung des M-Polygons genau wie vorhin durchgeführt.

2. Fall. In der Symmetrieachse liegen 2 Knotenpunkte; dieselben erhalten die Ordnungsziffern 0 und n, Abb. 15. Zwischen den drei aufeinander folgenden Knotenpunktsmomenten M_1, M_0, M_1 besteht die Gleichung

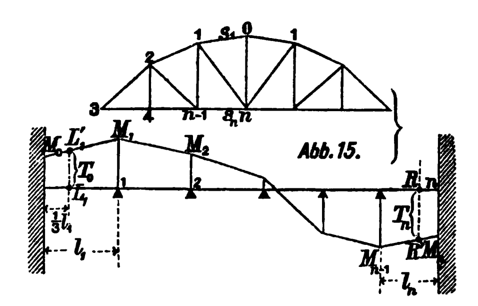
$$M_1 l_1 + 2 M_0 (l_1 + l_1) + M_1 l_1 = N_0,$$

aus welcher folgt:

$$\frac{2}{3} M_0 + \frac{1}{3} M_1 = \frac{N_0}{6\, l_1} = T_0,$$

und ähnlich ergiebt sich

$$\frac{1}{3}M_{n+1} + \frac{2}{3}M_n = \frac{N_n}{6\,l_n} = T_n.$$



Die im ersten Felde des stellvertretenden Balkens im Abstande $\frac{1}{3}l_1$ vom Stützpunkte 0 gelegene Ordinate des M-Polygons ist nun:

$$\overline{L_1 L'_1} = \frac{2}{3}M_0 + \frac{1}{3}M_1 = T_0$$

und die im letzten Felde im Abstande $\frac{1}{3}l_n$ vom Stützpunkte n gelegene:

$$\overline{RR'} = \frac{2}{3}M_n + \frac{1}{3}M_{n-1} = T_n,^{1)}$$

sodafs zwei Punkte des M-Polygons von vornherein bekannt sind. Dieses Polygon läfst sich also mit Hülfe des im § 1 beschriebenen Verfahrens zeichnen. Vgl. Abb. 6.

3. Fall. Die Symmetrieachse enthält nur einen Knotenpunkt. Es handelt sich hier um eine Verbindung der

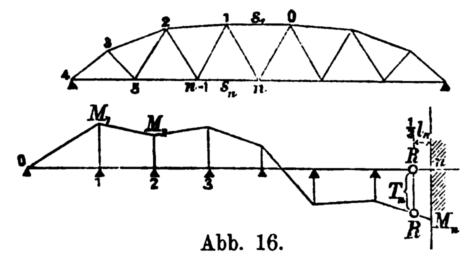


Abb. 16.

Fälle 1 und 2. Bei der in Abb. 16 gewählten Bezeichnung

1) In Abb. 15 ist T_n negativ angenommen worden.

der Knotenpunkte ist der stellvertretende Balken bei 0 frei aufliegend. Sein erstes Feld besitzt die Länge

$$l'_1 = 1{,}5\, s_1 \frac{J_c}{J_1};$$

die übrigen Feldlängen sind mittels der Formel

$$l_m = s_m \frac{J_c}{J_m}$$

zu berechnen. Die im letzten Felde in der Entfernung $\frac{1}{3} l_n$ vom Stützpunkte n gelegene Ordinate des M-Polygons ist

$$\overline{RR'} = T_n.$$ [1])

III. Es ist kein Knotenpunktsmoment gleich Null, und es besteht keine Symmetrie.

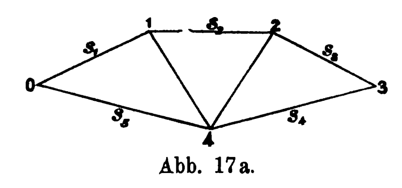


Abb. 17a.

Wir erläutern den bei der Ermittlung der Knotenpunktsmomente M einzuschlagenden Weg an dem in Abb. 17a dargestellten Träger. Es bestehen, aufser der Beziehung:

$$M_4 l_5 + 2 M_0 (l_5 + l_1) + M_1 l_1 = N_0, \tag{17}$$

noch die Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} M_0 l_1 + 2 M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 = N_1 \\ M_1 l_2 + 2 M_2 (l_2 + l_3) + M_3 l_3 = N_2 \\ M_2 l_3 + 2 M_3 (l_3 + l_4) + M_4 l_4 = N_3 \\ M_3 l_4 + 2 M_4 (l_4 + l_5) + M_0 l_5 = N_4. \end{array}\right. \tag{18}$$

Wir betrachten zunächst nur die Gleichungen (18), sehen M_0 als gegeben an, schaffen die Glieder $M_0 l_1$ und $M_0 l_5$ auf die rechte Seite und erhalten:

$$\left\{\begin{array}{l} 2 M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 = N_1 - M_0 l_1 \\ M_1 l_2 + 2 M_2 (l_2 + l_3) + M_3 l_3 = N_2 \\ M_2 l_3 + 2 M_3 (l_3 + l_4) + M_4 l_4 = N_3 \\ M_3 l_4 + 2 M_4 (l_4 + l_5) = N_4 - M_0 l_5. \end{array}\right. \tag{19}$$

---

1) In Abb. 16 ist T_n negativ angenommen worden.

Nun bezeichnen wir mit

$\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_4$ diejenigen Werthe, welche die Unbekannten M_1 bis M_4 annehmen würden, wenn $M_0 = 0$ wäre,

und mit

μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 die Werthe jener Unbekannten für den Fall, dafs sämtliche Glieder N der obigen Gleichungen verschwinden und $M_0 = 1$ wird.

Die Momente $\mathfrak{M}$ lassen sich mit Hülfe des unter I. gegebenen Verfahrens bestimmen; dasselbe ist ja brauchbar, sobald ein Knotenpunktsmoment (hier M_0) gleich Null ist. Aber auch die Werthe μ ergeben sich mit Hülfe jenes Verfahrens, indem $T_1 = -\frac{l_1}{3(l_1+l_2)}$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$, $T_4 = -\frac{l_5}{3(l_4+l_5)}$ [1]) gesetzt wird. Die Darstellung des μ-Polygons zeigt Abb. 17b.

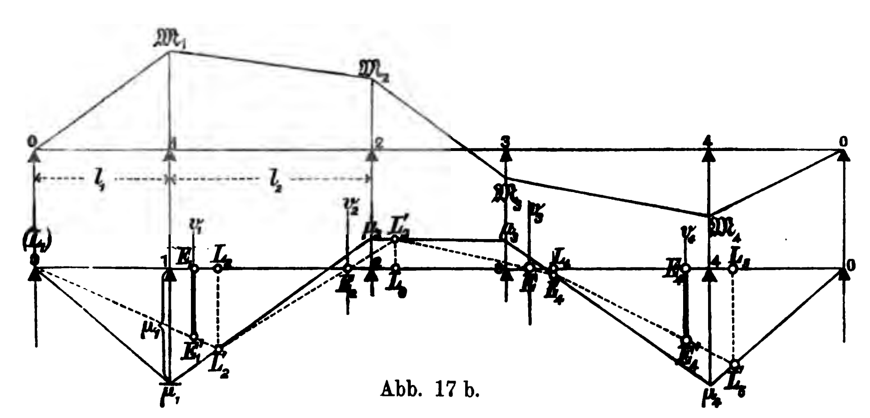


Abb. 17 b.

Auf den verschränkten Stützensenkrechten v_1 und v_4 werden die Ordinaten

$$\overline{E_1E'_1} = T_1 = -\frac{l_1}{3(l_1+l_2)} \quad \text{und} \quad \overline{E_4E'_4} = -\frac{l_5}{3(l_4+l_5)}$$

aufgetragen. Hierauf wird der Linienzug $L_1 L'_2 L'^3 L'_4 L'_5$ gezeichnet, dessen Seiten durch die Punkte E'_1, E_2, E_3, E'_4

1) Schreibt man zunächst, entsprechend der Gleichung 19 und mit Beachtung der früheren Entwicklungen, $T_1 = \frac{N_1 - M_0 l_1}{3(l_1+l_2)}$, $T_2 = \frac{N_2}{3(l_2+l_3)}$, usw. und setzt hierauf $N_1 = 0$, $N_2 = 0, \ldots$ und $M_0 = 1$, so ergeben sich obige Werthe T.

gehen und dessen Ecken in den Senkrechten durch die Festpunkte L_2, L_3, L_4, L_5 liegen. Diese Eckpunkte L' sind Punkte des gesuchten μ-Polygons, welches durch die äufsersten Stützpunkte (0) des stellvertretenden Balkens geht, und dessen Eckpunkte in den Stützen-Senkrechten liegen.

Nach Ermittlung der $\mathfrak{M}$ und μ findet man die wirklichen Werthe der Momente M:

$$M_1 = \mathfrak{M}_1 + \mu_1 M_0$$
$$M_2 = \mathfrak{M}_2 + \mu_2 M_0$$
$$M_3 = \mathfrak{M}_3 + \mu_3 M_0$$
$$M_4 = \mathfrak{M}_4 + \mu_4 M_0.$$

Zur Berechnung von M_0 dient die Gleichung (17); dieselbe geht über in

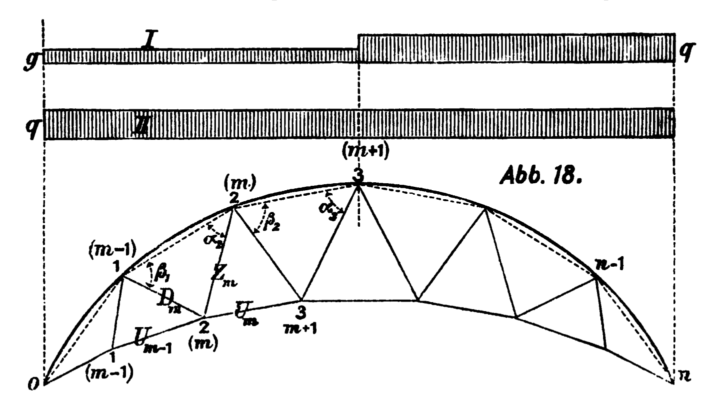
$$(\mathfrak{M}_4 + \mu_4 M_0) l_5 + 2 M_0 (l_5 + l_1) + (\mathfrak{M}_1 + \mu_1 M_0) l_1 = N_0$$

und liefert:

$$(20) \qquad M_0 = \frac{N_0 - \mathfrak{M}_1 l_1 - \mathfrak{M}_4 l_5}{2(l_1 + l_5) - \mu_1 l_1 - \mu_5 l_5}.$$

§ 5. Fachwerk-Träger mit einer gekrümmten Gurtung.

Wir entwickeln nun die Theorie eines in neuerer Zeit mehrfach als Dachbinder ausgeführten und in Abb. 18 dargestellten



Trägers, dessen Obergurtstäbe gekrümmt sind und in den Knotenpunkten ohne Gelenke aneinanderhängen, während die Untergurtstäbe und Wandglieder gerade und gelenkartig befestigt sind. Es möge eine beliebige Belastung vorausgesetzt werden und

auch dahingestellt bleiben, ob die Lasten ausschliefslich in den Knotenpunkten angreifen oder nicht.

Die Untersuchung des Trägers beginnt man zweckmäfsig mit der Berechnung derjenigen Spannkräfte und Biegungsmomente, durch welche die Querschnitte der verschiedenen Stäbe für den Fall beansprucht werden, dafs auch die Obergurtstäbe in den Knotenpunkten gelenkartig miteinander befestigt werden. Wie diese einfache Berechnung durchzuführen ist, setzen wir hier als bekannt voraus; wir nehmen an, sie habe ergeben:

für den dem oberen Knotenpunkte m gegenüberliegenden Untergurtstab die Spannkraft U'_m,

für die vom unteren Knotenpunkte m ausgehenden Wandglieder die Spannkräfte D'_m und Z'_m;

für den dem unteren Knotenpunkte m gegenüberliegenden Obergurtstab die Spannkraft O'_m (dieselbe fällt mit der die oberen Knotenpunkte $m-1$ und m verbindenden Sehne zusammen),

für irgend einen Querschnitt der oberen Gurtung das Moment M'_x und die (senkrecht zum Querschnitte wirkende) Längskraft N'_x.

Die Kräfte U', D', Z', O', N'_x sollen positiv angenommen werden, sobald sie Zugkräfte sind. M'_x sei positiv gesetzt, sobald es in dem untersten Punkte des Querschnitts Zugspannungen hervorruft, sobald es also bestrebt ist, den Krümmungshalbmesser der Stabachse zu vergröfsern.

Die in Wirklichkeit (d. h. bei Fortfall der zunächst in der oberen Gurtung angenommenen Gelenke) auftretenden Spannkräfte, Längskräfte und Biegungsmomente bezeichnen wir mit U, D, Z, O, N_x, M_x und die Biegungsmomente für die Querschnitte durch die Knotenpunkte 1, 2, 3, ... m ... der oberen Gurtung mit M_1, M_2, M_3, ... M_m ... (Knotenpunktsmomente).

Um den Einflufs dieser Momente auf die Werthe U, D, Z, O, N_x, M_x festzustellen, setzen wir zunächst voraus, es sei $M_m = 1$, während die übrigen Knotenpunktsmomente und alle auf den Träger wirkenden äufseren Kräfte gleich Null sind.

Der betreffende Belastungszustand ist in Abb. 19 dargestellt worden; er heifse kurz „der Zustand $M_m = 1$". Die Stäbe links von der Diagonale $(m-1)-m$ und rechts von der Diagonale $(m+1)-(m+1)$ sind beim Eintreten dieses Zustandes spannungslos.

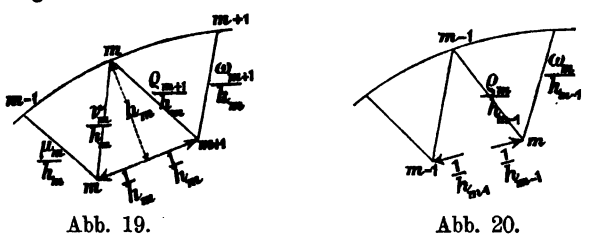


Abb. 19. Abb. 20.

Wir bezeichnen mit h_m das Loth vom oberen Knotenpunkte m auf den Untergurtstab $m-(m+1)$, denken uns in diesem Stabe den Druck $\frac{1}{h_m}$ thätig, schneiden ein Stück des Stabes heraus und bringen hierauf die Kräfte $\frac{1}{h_m}$ als äufsere Kräfte an; sie erzeugen bei m das Biegungsmoment

$$M_m = \frac{1}{h_m} \cdot h_m = 1.$$

Die in den Wandgliedern durch die Kräfte $\frac{1}{h_m}$ hervorgerufenen Spannkräfte seien beziehungsweife

$$\frac{\mu_m}{h_m}, \quad \frac{\nu_m}{h_m}, \quad \frac{\varrho_{m+1}}{h_m}, \quad \frac{\omega_{m+1}}{h_m},$$

wobei also μ_m, ν_m, ϱ_{m+1}, ω_{m+1} diejenigen Spannkräfte bedeuten, welche entstehen, sobald an Stelle der Kräfte $\frac{1}{h_m}$ die Kräfte 1 treten; sie werden am besten zeichnerisch bestimmt.

In gleicher Weise wurde in Abb. 20 der Zustand $M_{m-1} = 1$ behandelt. Die Betrachtung beider Zustände führt sofort zu den Gleichungen

$$(21) \quad \begin{cases} U_m = U_m' - \dfrac{M_m}{h_m} \\ D_m = D_m' + \mu_m \dfrac{M_m}{h_m} + \varrho_m \dfrac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \\ Z_m = Z_m' + \nu_m \dfrac{M_m}{h_m} + \omega_m \dfrac{M_{m-1}}{h_{m-1}}, \end{cases}$$

mit deren Hülfe sich die Spannkräfte in den Fachwerkstäben berechnen lassen, sobald die Knotenpunkt-Momente gegeben sind.

Zerlegt man jetzt die bei Eintreten des Zustandes $M_m = 1$ in der Diagonale $(m-1)-m$ wirksame Spannkraft in eine Seitenkraft senkrecht zur Sehne s_m (Abb. 21) und in eine

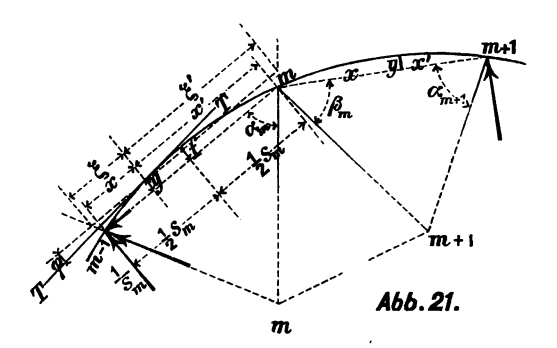


Abb. 21.

Seitenkraft in der Richtung von s_m, so mufs erstere $= \frac{1}{s_m}$ und letztere $= \frac{1}{s_m} \operatorname{cotg} \beta_{m-1}$ sein; denn das Moment bei m mufs sein:

$$M_m = \frac{1}{s_m} \cdot s_m = 1.$$

Es ergiebt sich deshalb, mit den aus der Abb. 21 (in welcher TT eine Tangente an die Bogenachse bedeutet) ersichtlichen Bezeichnungen, für den bei x gelegenen Querschnitt des $m$ten Obergurtstabes die Längskraft

$$N_x'' = \frac{1}{s_m} \operatorname{cotg} \beta_{m-1} \cos \varphi - \frac{1}{s_m} \sin \varphi,$$

wofür, wegen des sehr kleinen Winkels φ, stets geschrieben werden darf:

$$(22) \qquad N_x'' = \frac{1}{s_m} \operatorname{cotg} \beta_{m-1},$$

und ebenso folgt für den $(m+1)$ten Obergurtstab:

$$(23) \qquad N_x'' = \frac{1}{s_{m+1}} \operatorname{cotg} \alpha_{m+1}.$$

Das dem Zustande $M_m = 1$ entsprechende Biegungsmoment ist für den bei x gelegenen Querschnitt des Stabes $(m-1)-m$:

$$M_x'' = \frac{1}{s_m} x + \frac{\operatorname{cotg} \beta_{m-1}}{s_m} y \tag{24}$$

und für einen Querschnitt des Obergurtstabes $m-(m+1)$:

$$M_x'' = \frac{1}{s_{m+1}} x' + \frac{\operatorname{cotg} \alpha_{m+1}}{s_{m+1}} y. \tag{25}$$

Bei Eintreten des Zustandes $M_{m-1}=1$ (Abb. 20) ergiebt sich auf ähnliche Weise für den Obergurtstab $(m-1)-m$:

$$N_x'' = \frac{1}{s_m} \operatorname{cotg} \alpha_m \quad \text{und}$$

$$M_x'' = \frac{1}{s_m} x' + \frac{\operatorname{cotg} \alpha_m}{s_m} y,$$

und es leuchtet ein, dafs die in Wirklichkeit an der Stelle x hervorgerufenen Werthe N_x und M_x durch die Gleichungen gegeben sind:

$$\left\{ \begin{aligned} N_x &= N'_x + \frac{1}{s_m} (\operatorname{cotg} \beta_{m-1} M_m + \operatorname{cotg} \alpha_m M_{m-1}) \\ M_x &= M_x' + \frac{1}{s_m} [(x + y \operatorname{cotg} \beta_{m-1}) M_m \\ &\qquad + (x' + y \operatorname{cotg} \alpha_m) M_{m-1}]. \end{aligned} \right. \tag{26}$$

Der zweite Ausdruck läfst sich noch umformen in

$$M_x = M_x' + \frac{1}{s_m} (\xi M_m + \xi' M_{m-1}), \tag{27}$$

wobei ξ und ξ' beziehungsweise die parallel zur Sehne gemessenen Abstände des Bogenpunktes (x, y) von den Diagonalen $(m-1)-m$ und $m-m$ sind. Vergl. Abb. 21.

Durch die Gleichungen (26) und (27) ist die Beanspruchung irgend eines Bogenstückes völlig bestimmt, vorausgesetzt, dafs die Knotenpunkt-Momente gegeben sind. Um diese letzteren bestimmen zu können, sind $(n-1)$ Elasticitätsgleichungen nöthig. Wir erhalten dieselben durch Anwendung des Gesetzes der virtuellen Verschiebungen auf die $(n-1)$ Zustände: $M_1=1$, $M_2=1$, $M_3=1, \ldots . M_m=1, \ldots . M_{m-1}=1$, indem wir — zunächst unter der Voraussetzung willkürlicher Formänderungen — die von den äufseren Kräften geleistete virtuelle Arbeit gleich der virtuellen Formänderungsarbeit setzen und schliefslich an Stelle der virtuellen die wirklichen Verschiebungen einführen.

Bezeichnen wir mit u_m, d_m, z_m die Längen der durch die Spannkräfte U_m, D_m, Z_m beanspruchten Fachwerkstäbe mit ds' die Länge des Elementes der Achse der oberen Gurtung, mit Δu_m, Δd_m, Δz_m, $\Delta ds'$ die zunächst willkürlichen Aenderungen der genannten Längen, und mit $\Delta d\varphi$ die ebenfalls willkürliche Aenderung des Winkels $d\varphi$, so folgt aus dem Gesetze der virtuellen Verschiebungen für den in Abb. 19 dargestellten Belastungszustand $M_m = 1$ die Gleichung:

$$(28)\quad \frac{1}{h_m}\Delta u_m = \frac{\mu_m}{h_m}\Delta d_m + \frac{\nu_m}{h_m}\Delta z_m + \frac{\varrho_{m+1}}{h_m}\Delta d_{m+1} + \frac{\omega_{m+1}}{h_m}\Delta z_{m+1} + \int N_x''\Delta ds' + \int M^{x''}\Delta d\varphi,$$

deren Integrale sich über das Stück $(m-1)-(m+1)$ der oberen Gurtung erstrecken. Bezeichnet weiter:

F_{um} den Inhalt des Querschnittes des Stabes u_m,
F_{dm} " " " " " " d_m,
F_{zm} " " " " " " z_m,
F_m " " " " " " s_m [1])
J_m das auf die zur Kräfteebene senkrechte Schwerachse des Querschnittes F_m bezogene Trägheitsmoment dieses Querschnittes,
t_{um} die Aenderung der Temperatur des Stabes u_m,
t_{dm} " " " " " " d_m,
t_{zm} " " " " " " z_m,
t_m " " " " " " s_m,
ε die Ausdehnungsziffer für den Temperaturunterschied 1 (= 0,000012 für Schmiedeeisen),

und wird die Temperaturänderung für alle Punkte eines und desselben Stabes gleich grofs vorausgesetzt, so ist in die Gleichung (28) zu setzen:

$$\Delta u_m = \frac{U_m u_m}{EF_{um}} + \varepsilon t_{um} u_m;$$

$$\Delta d_m = \frac{D_m d_m}{EF_{dm}} + \varepsilon t_{dm} d_m;$$

$$\Delta z_m = \frac{Z_m z_m}{EF_{zm}} + \varepsilon t_{zm} z_m;$$

---

1) Den Obergurtstab $(m-1)-m$ wollen wir der Kürze wegen den Stab s_m nennen.

für den Stab s_m:

$$\Delta ds' = \frac{N_x ds'}{EF_m} + \varepsilon t_m ds' \ ; \quad \Delta d\varphi = \frac{M_x ds'}{EJ_m};$$

$$N_x'' = \frac{1}{s_m} \operatorname{cotg} \beta_{m-1} \quad ; \quad M_x'' = \frac{x + y \operatorname{cotg} \beta_{m-1}}{s_m}$$

und für den Stab s_{m+1}:

$$\Delta ds' = \frac{N_x ds'}{EF_{m+1}} + \varepsilon t_{m+1} ds' \ ; \quad \Delta d\varphi = \frac{M_x ds'}{EJ_{m+1}};$$

$$N_x'' = \frac{1}{s_{m+1}} \operatorname{cotg} \alpha_{m+1} \quad ; \quad M_x'' = \frac{x' + y \operatorname{cotg} \alpha_{m+1}}{s_{m+1}}.$$

Wird dx an die Stelle von ds' gesetzt (was stets zulässig ist) und die Gleichung (28) mit EJ_c multiplicirt, wobei J_c ein beliebiges Querschnittsträgheitsmoment bedeutet, so ergiebt sich die Bedingung:

$$\begin{aligned}
(29) \qquad & \frac{1}{s_m} \frac{J_c}{J_m} \int_0^{s_m} (x + y \operatorname{cotg} \beta_{m-1}) \, M_x \, dx \\
& + \frac{1}{s_{m+1}} \frac{J_c}{J_{m+1}} \int_0^{s_{m+1}} (x' + y \operatorname{cotg} \alpha_{m+1}) \, M_x \, dx' \\
& + \frac{\operatorname{cotg} \beta_{m-1}}{s_m} \frac{J_c}{F_m} \int_0^{s_m} (N_x + \varepsilon E t_m F_m) \, dx \\
& + \frac{\operatorname{cotg} \alpha_{m+1}}{s_{m+1}} \frac{J_c}{F_{m+1}} \int_0^{s_{m+1}} (N_x + \varepsilon E t_{m+1} F_{m+1}) \, dx \\
& - \frac{J_c}{h_m} \Big[\frac{U_m}{F_{um}} u_m - \mu_m \frac{D_m}{F_{dm}} d_m - \nu_m \frac{Z_m}{F_{zm}} z_m \\
& - \varrho_{m+1} \frac{D_{m+1}}{F_{d(m+1)}} d_{m+1} - \omega_{m+1} \frac{Z_{m+1}}{F_{z(m+1)}} z_{m+1} \Big] \\
& - \frac{\varepsilon E J_c}{h_m} \left[t_{um} u_m - \mu_m t_{dm} d_m - \nu_m t_{zm} z_m \right. \\
& \left. - \varrho_{m+1} t_{d(m+1)} d_{m+1} - \omega_{m+1} t_{z(m+1)} z_{m+1} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Drückt man jetzt U, D, Z mit Hülfe der Gleichungen (21) aus, und M_x, N_x mittels der Gleichungen 26, so erhält man die Elasticitätsbedingung:

$$(30)\quad a_m M_{m-1} + b_m M_m + a_{m+1} M_{m+1} = C_m$$

wobei:

$$a_m = \frac{1}{s_m}\left[\frac{J_c}{s_m J_m}\int_0^{s_m}(x + y \operatorname{cotg}\beta_{m-1})(x' + y \operatorname{cotg}\alpha_m)\,dx + \frac{J_c}{F_m}\operatorname{cotg}\beta_{m-1}\operatorname{cotg}\alpha_m\right] + \frac{J_c}{h_m h_{m-1}}\left(\frac{\mu_m \varrho_m d_m}{F_{dm}} + \frac{\nu_m \omega_m z_m}{F_{zm}}\right),$$

$$b_m = \frac{1}{s_m}\left[\frac{J_c}{s_m J_m}\int_0^{s_m}(x + y \operatorname{cotg}\beta_{m-1})^2 dx + \frac{J_c}{F_m}\operatorname{cotg}^2\beta_{m-1}\right] + \frac{1}{s_{m+1}}\left[\frac{J_c}{s_{m+1} J_{m+1}}\int_0^{s_{m+1}}(x' + y \operatorname{cotg}\alpha_{m+1})^2 dx + \frac{J_c}{F_{m+1}}\operatorname{cotg}^2\alpha_{m+1}\right] + \frac{J_c}{h_m^2}\left(\frac{u_m}{F_{um}} + \frac{\mu_m^2 d_m}{F_{dm}} + \frac{\nu_m^2 z_m^2}{F_{zm}} + \frac{\varrho_{m+1}^2 d_{m+1}}{F_{d(m+1)}} + \frac{\omega_{m+1}^2 z_{m+1}}{F_{z(m+1)}}\right),$$

$$a_{m+1} = \frac{1}{s_{m+1}}\left[\frac{J_c}{s_{m+1} J_{m+1}}\int_0^{s_{m+1}}(x + y \operatorname{cotg}\beta_m)(x' + y \operatorname{cotg}\alpha_{m+1})\,dx + \frac{J_c}{F_{m+1}}\operatorname{cotg}\beta_m \operatorname{cotg}\alpha_{m+1}\right] + \frac{J_c}{h_m h_{m+1}}\left(\frac{\mu_{m+1}\varrho_{m+1} d_{m+1}}{F_{d(m+1)}} + \frac{\nu_{m+1}\omega_{m+1} z_{m+1}}{F_{z(m+1)}}\right),$$

$$C_m = \frac{J_c}{h_m}\left(\frac{U'_m}{F_{um}} u_m - \mu_m \frac{D'_m}{F_{dm}} d_m - \nu_m \frac{Z'_m}{F_{zm}} z_m - \varrho_{m+1}\frac{D'_{m+1}}{F_{d(m+1)}} d_{m+1} - \omega_{m+1}\frac{Z'_{m+1}}{F_{z(m+1)}} z_{m+1}\right) - \frac{J_c}{s_m J_m}\int_0^{s_m}(x + y \operatorname{cotg}\beta_{m-1})\, M'_x\, dx$$

$$-\frac{J_c}{s_{m+1}\,J_{m+1}}\int\limits_0^{s_{m+1}}(x'+y\cot g\,\alpha_{m+1})\,M'_x dx'$$

$$-\frac{\cot g\,\beta_{m-1}}{s_m}\,\frac{J_c}{F_m}\int\limits_0^{s_m}N'_x\,dx-\frac{\cot g\,\alpha_{m+1}}{s_{m+1}}\,\frac{J_c}{F_{m+1}}\int\limits_0^{s_m}N'_x\,dx$$

$$+\varepsilon E J_c\Big[-t_m\cot g\,\beta_{m-1}-t_{m+1}\cot g\,\alpha_{m+1}+\frac{1}{h_m}(t_{um}u_m$$
$$-\mu_m t_{dm} d_m-\nu_m t_{zm} z_m-\varrho_{m+1} t_{d(m+1)} d_{m+1}$$
$$-\omega_{m+1}\,t_{z(m+1)}\,z_{m+1})\Big].$$

Ganz entsprechende Gleichungen ergeben sich für die Zustände $M_1=0$, $M_2=0$, ... bis $M_{n-1}=0$. Man erhält:

$$(31)\begin{cases} b_1 M_1 + a_2 M_2 = C_2 \\ a_2 M_1 + b_2 M_2 + a_3 M_3 = C_2 \\ a_3 M_2 + b_3 M_3 + a_4 M_4 + C_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-2} M_{n-3} + b_{n-2} M_{n-2} + a_{n-1} M_{n=1} = C_{n-2} \\ a_{n-1} M_{n-2} + b_{n-1} M_{n-1} \qquad = C_{n-1}. \end{cases}$$

Es empfiehlt sich, nach Berechnung der Werthe a, b, C die Momente M zeichnerisch zu bestimmen. Zu diesem Zwecke tragen wir die M, von einer Wagerechten $0-n$ aus, in beliebig grofsen Abständen l als Ordinaten auf, wie dies Abb. 22 zeigt. Die Endpunkte dieser Ordinaten verbinden wir, durch die Geraden g_1, g_2, g_3 ... g_n, und den auf diese Weise entstandenen Linienzug nennen wir wie früher das M-Polygon.

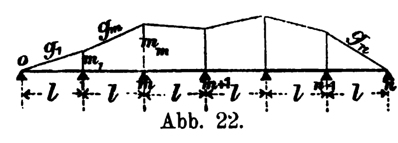


Abb. 22.

Abb. 23 stellt das $(m-1)$te und $m$te Feld dieses Polygons dar. Wird die Senkrechte I_m so gezogen, dafs die Strecken a' und b', in welche sie das $m$te Feld l theilt, sich verhalten:

$$a':b'=a_m:b_m,$$

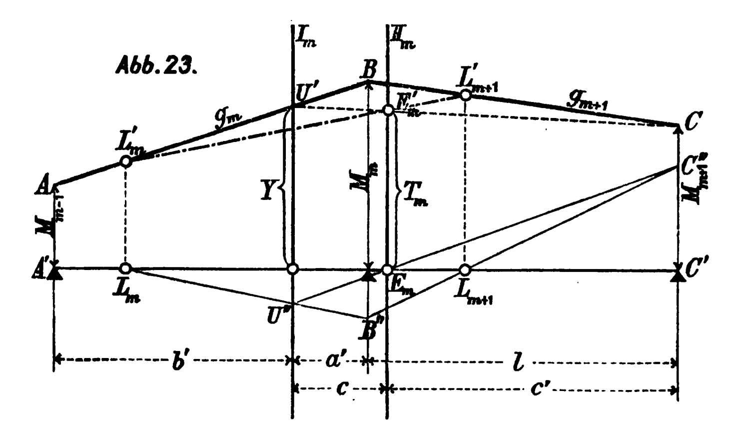
so ist die von der Geraden g_m auf der Senkrechten I_m abgeschnittene Ordinate:

$$Y = M_{m-1}\frac{a'}{a'+b'} + M_m\frac{b'}{a'+b'}$$

$$= \frac{M_{m-1}\,a_m + M_m\,b_m}{a_m + b_m}$$

und die Gleichung (30) läfst sich mithin auch schreiben:

$$(32) \qquad (a_m + b_m)\,Y + a_{m+1}\,M_{m+1} = C_m.$$



Zieht man jetzt die Senkrechte II_m so, dafs sie die Strecke $l + a'$ im Verhältnifs:

$$c' : c = (a_m + b_m) : a_{m+1}$$

theilt, so schneidet die Gerade $U'C$ auf der II_m die Ordinate ab:

$$T_m = Y\frac{c'}{c'+c} + M_{m+1}\frac{c}{c'+c}$$

$$= \frac{Y(a_m + b_m) + M_{m+1}\,a_{m+1}}{a_m + b_m + a_{m+1}},$$

und es folgt aus der Vergleichung dieses Ausdruckes mit der Beziehung (32) das Gesetz:

> Die mit Hülfe der Senkrechten I_m bestimmte Gerade $U'C$ (Abb. 23) mufs auf der Senkrechten II_m das gegebene Moment
>
> $$\overline{E_m E'_m} = T_m = \frac{C_m}{a_m + b_m + a_{m+1}}$$
>
> abschneiden.

Weiter ergiebt sich, wie im § 1:

Dreht sich die Gerade g_m um einem festen Punkt L'_m, so dreht sich die Gerade g_{m+1} um einen in der Geraden $L'_m E'_m$ gelegenen festen Punkt L'_{m+1}.

Aus dem senkrecht unter L'_m gelegenen Punkte L_m findet man den senkrecht unter L'_{m+1} gelegenen Punkt L_{m+1} wie folgt. Man zieht die beliebige Gerade $L_m B''$, welche die I_m in U'' schneidet, legt durch U'' und E_m die Gerade $U'' E_m C''$ und zieht die Gerade $C'' B''$; dieselbe schneidet die $A' C'$ in dem gesuchten Punkte L_{m+1}.

Mit Hülfe der vorstehenden Gesetze läfst sich nun das M-Polygon in ähnlicher Weise zeichnen wie das M-Polygon eines geraden Balkens (§ 1). Nach Eintragung der Senkrechten

$$I_1, II_1 \quad I_2, II_2 \quad I_3, II_3 \ldots\ldots$$

werden, von dem gegebenen, mit dem Punkte 0 in Abb. 22 zusammenfallenden Punkte L_1 der ersten Oeffnung aus, der Reihe nach die Punkte L_2, L_3, $L_4 \ldots L_n$ bestimmt, und hierauf wird der Linienzug $L_1 L'_2 L'_3 L'_4 \ldots L'_n$ gezeichnet, dessen Eckpunkte in den Senkrechten durch die Punkte L_2, L_3, $L_4 \ldots L_n$ liegen, und dessen Seiten auf den Senkrechten I_1, I_2, I_3, $I_4 \ldots I_{n-1}$ die gegebenen Momente T_1, T_2, T_3, $T_4 \ldots T_{n-1}$ abschneiden. Schliefslich wird durch die Punkte n, L'_n, $L'_{n-1} \ldots L'_4$, L'_3, L'_2, L'_1, 0 das gesuchte M-Polygon bestimmt.[1])

Wir geben schliefslich noch die Ausführung der in den Ausdrücken a, b, C enthaltenen Integrale für den (stets vorliegenden) Fall, dafs die einzelnen Bogenstücke der oberen Gurtung als Parabeln behandelt werden dürfen, deren Scheitelordinaten bei $x = \frac{1}{2} s$ liegen und mit f bezeichnet werden sollen. Abb. 21. Für das $m$te Bogenstück ist dann

$$y = \frac{4 f_m x (s_m - x)}{s_m^2},$$

1) Man kann das vorstehende Verfahren zur Darstellung des M-Polygons natürlich auch benutzen, um die in den §§ 1—4 in etwas anderer Weise behandelten Gleichungen:

$$M_{m-1} l_m + 2 M_m (l_m + l_{m+1}) + M_{m+1} l_{m+1} = N_m$$

aufzulösen. An Stelle der Drittelsenkrechten und verschränkten Stützensenkrechten treten dann die Senkrechten I und II.

und es ergiebt sich:

$$\int_0^{s_m} y_m x\,dx = \int_0^{s_m} y_m x'\,dx' = \frac{f_m s_m^2}{3}$$

$$\int_0^{s_m} y_m^2\,dx = \frac{8}{15} f_m^2 s_m .$$

Man erhält:

$$(33)\quad a_m = \frac{s_m}{3}\frac{J_c}{J_m}\left\{\frac{1}{2} + (\operatorname{cotg}\beta_{m-1} + \operatorname{cotg}\alpha_m)\frac{f_m}{s_m} + \frac{8}{5}\operatorname{cotg}\beta_{m-1}\operatorname{cotg}\alpha_m\frac{f_m^2}{s_m^2}\right\} + \frac{J_c}{F_m s_m}\operatorname{cotg}\beta_{m-1}\operatorname{cotg}\alpha_m + \frac{J_c}{h_m h_{m-1}}\left(\frac{\mu_m \varrho_m d_m}{F_{dm}} + \frac{\nu_m \omega_m \varkappa_m}{F_{\varkappa m}}\right).$$

$$(34)\quad b_m = \frac{s_m}{3}\frac{J_c}{J_m}\left\{1 + 2\operatorname{cotg}\beta_{m-1}\frac{f_m}{s_m} + \frac{8}{5}\operatorname{cotg}^2\beta_{m-1}\frac{f_m^2}{s_m^2}\right\} + \frac{s_{m+1}}{3}\frac{J_c}{J_m}\left\{1 + 2\operatorname{cotg}\alpha_{m+1}\frac{f_{m+1}}{s_{m+1}} + \frac{8}{5}\operatorname{cotg}^2\alpha_{m+1}\frac{f_{m+1}^2}{s_{m+1}^2}\right\} + \frac{J_c}{F_m s_m}\operatorname{cotg}^2\beta_{m-1} + \frac{J_c}{F_{m+1} s_{m+1}}\operatorname{cotg}^2\alpha_{m+1} + \frac{J_c}{h_m^2}\left(\frac{u_m}{F_{um}} + \frac{\mu_m^2 d_m}{F_{dm}} + \frac{\nu_m^2 \varkappa_m}{F_{\varkappa m}} + \frac{\varrho_{m+1}^2 d_{m+1}}{F_{d\,(m+1)}} + \frac{\omega_{m+1}^2 \varkappa_{m+1}}{F_{\varkappa\,(m+1)}}\right).$$

Die in a und b enthaltenen Glieder mit $\frac{f^2}{s^2}$ dürfen, da $\frac{f}{s}$ eine kleine Zahl ist, stets gestrichen werden.

Den Werth C_m wollen wir zunächst für den Fall angeben, dafs der Obergurtstab s_m gleichmäfsig belastet ist, und zwar wirke senkrecht zur Sehne s_m eine Belastung $= w_m$ für die Längeneinheit von s_m (d. i. der Winddruck, welcher stets in

dieser Weise angreifend gedacht werden darf), aufserdem im lothrechten Sinne eine Belastung $= q_m$ für die Längeneinheit der Horizontalprojektion λ_m. Es ist dann, wenn γ_m den Neigungswinkel der Sehne s_m gegen die Wagerechte bedeutet:

$$(35)\quad M'_x = \frac{w_m x (s_m - x)}{2} + \frac{q_m x (s_m - x)}{2} \cos^2\gamma_m + O'_m y,$$ [1])

wofür man auch schreiben darf

$$(36)\quad M'_x = \left[(w_m + q_m \cos^2\gamma_m) \frac{s_m^2}{8 f_m} + O'_m \right] y .$$

Die Längskraft N'_x darf stets $= O'_m$ gesetzt werden, und es folgt dann mit der abkürzenden Bezeichnung

$$(37)\qquad A_m = (w_m + q_m \cos^2\gamma_m) \frac{s_m^2}{8 f_m} + O'_m$$

für C_m der Werth:

$$\begin{aligned}(38)\quad C_m = \frac{J_c}{h_m} \Bigg(& \frac{U'_m}{F_{um}} u_m - \mu_m \frac{D'_m}{F_{dm}} d_m - \nu_m \frac{Z'_m}{F_{xm}} \\ & - \varrho_{m+1} \frac{D'_{m+1}}{F_{d\,(m+1)}} d_{m+1} \\ & - \omega_{m+1} \frac{Z'_{m+1}}{F_{x\,(m+1)}} \varkappa_{m+1} \Bigg) \\ & - \frac{1}{3} A_m f_m s_m \frac{J_c}{J_m} \left(1 + \frac{8}{5} \frac{f_m}{s_m} \operatorname{cotg} \beta_{m-1} \right) \\ & - \frac{1}{3} A_{m+1} f_{m+1} s_{m+1} \frac{J_c}{J_{m+1}} \left(1 + \frac{8}{5} \frac{f_m}{s_m} \operatorname{cotg} \alpha_{m+1} \right) \\ & - O'_m \operatorname{cotg} \beta_{m-1} \frac{J_c}{F_m} - O'_{m+1} \operatorname{cotg} \alpha_{m+1} \frac{J_c}{F_{m+1}}\end{aligned}$$

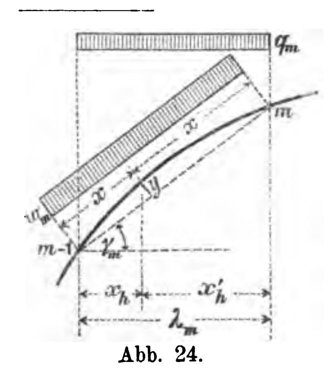


Abb. 24.

1) Das von q_m abhängige Glied müfste eigentlich lauten: $\frac{q_m x_h x'_h}{2}$, vergl. Abb. 24, wo $x_h = x \cos \gamma_m - y \sin \gamma_m$ und $x'_h = x' \cos \gamma_m + y \sin \gamma_m$. Es ist aber zulässig, zu setzen:

$$x_h x'_h = x x' \cos^2 \gamma_m = x (s_m - x) \cos^2 \gamma_m .$$

$$+ \varepsilon E J_c \Big[- t_m \operatorname{cotg} \beta_{m-1} - t_{m+1} \operatorname{cotg} \alpha_{m+1}$$

$$+ \frac{1}{h_m} (t_{um} u_m - \mu_m t_{dm} d_m - \nu_m t_{xm} x_m$$

$$- \varrho_{m+1} \, t_{d\,(m+1)} \, d_{m+1}$$

$$- \omega_{m+1} \, t_{x\,(m+1)} x_{m+1}) \Big] .$$

Man kann auch die in dem allgemeinen Ausdrucke für C_m enthaltenen, von den Momenten M'_x abhängigen Integrale für eine beliebige Belastung zeichnerisch bestimmen. Hierzu trägt man die M'_x auf Geraden, welche durch die entsprechenden Bogenpunkte gehen und senkrecht zur Sehne s_m sind, so auf, dafs sie durch jene Bogenpunkte halbirt werden. Verbindet man die Endpunkte dieser Strecken durch Curven und bezeichnet mit

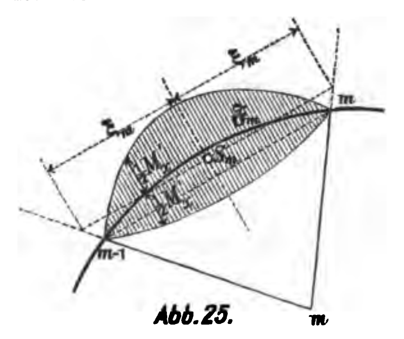


Abb. 25.

$\mathfrak{F}_m$ den Inhalt der von diesen Curven eingeschlossenen Fläche, und mit

ξ_m, ξ'_m die parallel zur s_m gemessenen Abstände des Schwerpunktes S_m der Fläche $\mathfrak{F}_m$ von den benachbarten Wandgliedern

$$(m-1) - m \quad \text{und} \quad m - m,$$

so erhält man

$$(39) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{s_m} (x + y \operatorname{cotg} \beta_{m-1}) \, M'_x dx = \mathfrak{F}_m \, \xi_m \quad \text{und} \\ &\int_0^{s_{m+1}} (x' + y \operatorname{cotg} \alpha_m) \, M'_x \, dx = \mathfrak{F}_m \, \xi'_m . \end{aligned} \right.$$

Der von den Momenten M'_x abhängigen Theil des Werthes C_m wird jetzt

$$- \frac{J_c}{J_m} \frac{\mathfrak{F}_m \xi_m}{s_m} - \frac{J_c}{J_m} \frac{\mathfrak{F}_{m+1} \xi'_{m+1}}{s_m} ;$$

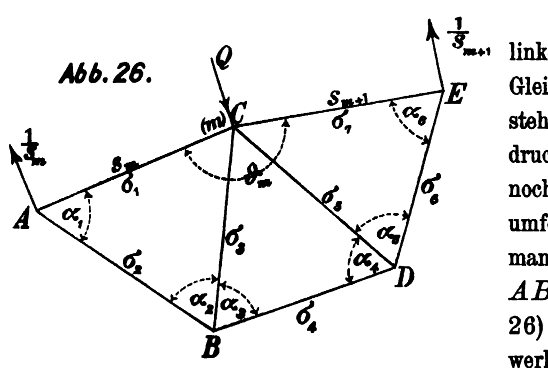
er läfst sich leicht durch Zeichnung bestimmen.

Es ist in der Regel zulässig, den Schwerpunkt S_m durch den Punkt zu ersetzen, in welchem die Bogenachse von der zur Sehne s_m senkrechten Schwerachse der Fläche $\mathfrak{F}_m$ geschnitten wird.

Näherungsformeln. Eine wesentliche Vereinfachung erfährt die Rechnung, wenn die in der Gleichung (28) enthaltenen Längenänderungen Δu, Δz, Δd unter der Voraussetzung von Gelenken in sämtlichen Knotenpunkten bestimmt werden, was immer zulässig ist. Setzt man dann noch was ebenfalls statthaft ist, $\Delta ds' = \frac{O'_m ds'}{EF_m}$ und vertauscht ds' mit dx, so geht die Gleichung (28) über in:

$$(40) \quad \frac{1}{h_m}\Delta u_m - \frac{\mu_m}{h_m}\Delta d_m - \frac{\nu_m}{h_m}\Delta z_m - \frac{\varrho_{m+1}}{h_m}\Delta d_{m+1} - \frac{\omega_{m+1}}{h_m}\Delta z_{m+1} - \frac{\operatorname{cotg}\beta_{m-1}}{s_m}\Delta s_m - \frac{\operatorname{cotg}\alpha_{m+1}}{s_{m+1}}\Delta s_{m+1} = \int M''_x \Delta d\varphi,$$

wobei $\Delta s_m = \frac{O'_m s_m}{EF_m} + \varepsilon t_m s_m$ und $\Delta s_m + 1 = \frac{O'_{m+1} s_{m+1}}{EF_{m+1}} + \varepsilon t_{m+1} s_{m+1}$ diejenigen Längenänderungen bedeuten, welche die Obergurtstäbe erfahren würden, falls sie gerade wären.



Den auf der linken Seite der Gleichung (40) stehenden Ausdruck kann man noch wie folgt umformen. Denkt man den Theil $ABDEC$ (Abb. 26) des Fachwerks, dessen Obergurtstäbe gerade angenommen sind, in A und E durch Kräfte $\frac{1}{s_m}$ und $\frac{1}{s_{m+1}}$ belastet, welche beziehungsweise senkrecht zu

s_m und s_{m+1} sind und denen eine in C angreifende Kraft Q das Gleichgewicht hält, so entstehen die Spannkräfte:

$$+\frac{1}{h_m} \text{ im Stabe } BD\,; \quad -\frac{\mu_m}{h_m} \text{ im Stabe } AB;$$
$$-\frac{\nu_m}{h_m} \quad " \quad " \quad BC\,; \quad -\frac{\varrho_{m+1}}{h_m} \quad " \quad " \quad CD;$$
$$-\frac{\omega_{m+1}}{h_m} \quad " \quad " \quad DE\,; \quad -\frac{\operatorname{cotg}\beta_{m-1}}{s_m} \quad " \quad " \quad AC$$
$$-\frac{\operatorname{cotg}\alpha_{m+1}}{s_{m+1}} \quad " \quad " \quad CE.$$

Nimmt man den Stab s_{m+1} festliegend an und bezeichnet mit $\varDelta\vartheta_m$ die Aenderung des Randwinkels ϑ_m, so verrichtet die äufsere Kraft $\frac{1}{s_m}$ die virtuelle Arbeit:

$$\frac{1}{s_m}\cdot s_m \varDelta\vartheta_m = \varDelta\vartheta_m,$$

und es ist nach dem Satze von der Arbeit:

$$\varDelta\vartheta_m = \frac{1}{h_m}\varDelta u_m - \frac{\mu_m}{h_m}\varDelta d_m - \frac{\nu_m}{h_m}\varDelta z_m - \frac{\varrho_{m+1}}{h_m}d_{m+1}$$
$$-\frac{\omega_{m+1}}{h_m}\varDelta z_{m+1} - \frac{\operatorname{cotg}\beta_{m-1}}{s_m}\varDelta s_m$$
$$-\frac{\operatorname{cotg}\alpha_{m+1}}{s_{m+1}}\varDelta s_{m+1}.$$

Die Gleichung (40) geht nach Einsetzen des früher für $\varDelta d\varphi$ und für M''_x angegebenen Werthe über in

$$EJ_c\varDelta\vartheta_m = \frac{J_c}{J_m}\int_0^{s_m}(x + y\operatorname{cotg}\beta_{m-1})\,M_x d_x$$
$$+\frac{J_c}{J_{m+1}}\int_0^{s_{m+1}}(x' + y\operatorname{cotg}\alpha_{m+1})\,M_x d_x.$$

Aus dieser Gleichung folgt schliefslich (vgl. die früher durchgeführten Rechnungen) für den Fall, dafs es zulässig ist, $y = 4\,\frac{f_x(s-x)}{s^2}$ zu setzen, und nach Streichen der unwesentlichen, $\frac{f^2}{s^2}$ enthaltenden Glieder:

3*

(41)
$$\begin{cases} a_m M_{m-1} + b_m M_m + a_{m+1} M_{m+1} = C_m, \\ \text{wobei [wenn } r_m = s_m : (\operatorname{cotg}\beta_{m-1} + \operatorname{cotg}\alpha_m) \text{ das Loth vom unteren Knotenpunkte } m \text{ auf die Sehne } s_m \text{ bedeutet]:} \\ a_m = \frac{1}{6} s_m \frac{J_c}{J_m}\left(1 + 2\frac{f_m}{r_m}\right), \\ b_m = \frac{1}{3} s_m \frac{J_c}{J_m}\left(1 + 2\operatorname{cotg}\beta_{m-1}\frac{f_m}{s_m}\right) \\ \quad + \frac{1}{3} s_{m+1} \frac{J_c}{J_{m+1}}\left(1 + 2\operatorname{cotg}\alpha_{m+1}\frac{f_{m+1}}{s_{m+1}}\right) \\ \text{und für den Belastungsfall in Abb. 24} \\ C_m = EJ_c\Delta\vartheta_m - \frac{1}{3}\left(A_m f_m s_m \frac{J_c}{J_m} \right. \\ \qquad \left. + A_{m+1} f_{m+1} s_{m+1} \frac{J_c}{J_{m+1}}\right), \\ \text{wo } A_m = (w_m + q_m\cos^2\gamma_m)\frac{s^2_m}{8f_m} + O'_m, \\ \text{während für eine beliebige Belastung (mit Hinweis auf Abb. 25)} \\ C_m = EJ_c\Delta\vartheta_m - \frac{J_c}{J_m}\frac{\mathfrak{F}_m \mathfrak{x}_m}{s_m} - \frac{J_c}{J_m}\frac{\mathfrak{F}_{m+1}\mathfrak{x}_{m+1}}{s_{m+1}}. \end{cases}$$

Das Rechnen mit diesen einfachen Werthen führt schnell zum Ziele und liefert zuverlässige Ergebnisse. Meistens darf man, der geringen Veränderlichkeit des Querschnittes wegen, J überall gleich grofs annehmen. Man wähle dann das bislang willkürliche Trägheitsmoment J_c gleich dem Mittelwerthe der wirklichen Trägheitsmomente und setze $\frac{J_c}{J_m} = 1$, $\frac{J_c}{J_{m+1}} = 1$.

Zur Berechnung von $E\Delta\vartheta_m$ empfiehlt sich besonders die (zunächst für $t = 0$ giltige) Gleichung:

42)
$$\begin{aligned} E\Delta\vartheta_m = & -\operatorname{cotg}\alpha_1(\sigma_1 - \sigma_2) + \operatorname{cotg}\alpha_2(\sigma_2 - \sigma_3) \\ & -\operatorname{cotg}\alpha_3(\sigma_3 - \sigma_4) + \operatorname{cotg}\alpha_4(\sigma_4 - \sigma_5) \\ & -\operatorname{cotg}\alpha_5(\sigma_5 - \sigma_6) + \operatorname{cotg}\alpha_6(\sigma_5 - \sigma_6). \end{aligned}$$

(Vgl. Abb. 26.)

Darin bedeuten σ_1, σ_2, σ_3.... diejenigen Spannungen[1]),

1) Spannung $= \frac{\text{Spannkraft}}{\text{Querschnittsfläche}}$. Gleichung (42) ergiebt sich leicht aus der in der Anmerkung auf S. 14 angeführten Formel zur Berechnung der Aenderung eines Dreieckwinkels.

welche sich in den einzelnen Stäben für den Fall ergeben würden, dafs in allen Knotenpunkten Gelenke angeordnet werden, dafs alle Stäbe gerade sind und alle Lasten in den Knotenpunkten angreifen. Sollen Temperaturänderungen berücksichtigt werden, so treten in Gleichung (42) an die Stelle der σ die Werthe $\sigma + \varepsilon E t$.

Belastungsweise. Will man die genauen Grenzwerthe der in den einzelnen Theilen des betrachteten Trägers auftretenden Beanspruchungen haben, so empfiehlt es sich, die Wirkung der verticalen Lasten mit Hülfe von Einflufslinien festzustellen und hierauf gesondert die Beanspruchungen durch Winddruck. Bei der Berechnung von Dachbindern (und mit diesen haben wir es hier wohl ausschliefslich zu thun) darf man sich jedoch auf die folgende einfache Untersuchung beschränken.

Man setzt zuerst voraus, es sei nur die rechte Hälfte des Trägers belastet und zwar gleichmäfsig mit $q = 1$ für die Längeneinheit der Stützweite AB. Es möge dieser Belastungsfall die Knotenpunktsmomente $\mathfrak{M}'_1$, $\mathfrak{M}'_2$, $\mathfrak{M}'_3 \ldots\ldots \mathfrak{M}'_m \ldots\ldots$ ergeben.

Wird hierauf nur die linke Hälfte mit $q = 1$ belastet angenommen, so entstehen, wenn der Träger in Bezug auf die Senkrechte durch seine Mitte symmetrisch ist, die Momente

$$\mathfrak{M}''_1 = \mathfrak{M}'_{n-1}, \quad \mathfrak{M}''_2 = \mathfrak{M}'_{n-2}, \quad \ldots\ldots$$

Bezeichnet man nun (wieder für die Längeneinheit der Stützweite) die bleibende Last (Eigengewicht) mit g und die veränderliche Last mit p und setzt $g + p = q$, so erhält man für den Belastungszustand I (Abb. 18) die Knotenpunktsmomente

$$M_1 = \mathfrak{M}'_1 g + \mathfrak{M}''_1 q$$
$$M_2 = \mathfrak{M}'_2 g + \mathfrak{M}''_1 q$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und für den Belastungsfall II (Abb. 18)

$$M_1 = (\mathfrak{M}'_1 + \mathfrak{M}''_1) q$$
$$M_2 = (\mathfrak{M}'_2 + \mathfrak{M}''_2) q$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Fälle I und II werden nun vollständig durchgerechnet und miteinander verglichen.

Bei hohen Dächern mufs noch der Einflufs schräger Winddrücke untersucht werden. Es sind zwei Fälle zu betrachten; einmal ist der Wind von der Seite kommend anzunehmen, auf der das bewegliche Auflager liegt, dann von der entgegengesetzten Seite.

Ungleichmäfsige Erwärmungen der einzelnen Stäbe werden in der Regel nicht berücksichtigt. Ist aber die Temperaturänderung t überall dieselbe, so ist sie ohne Einflufs auf die Momente M; es dürfen dann in C_m alle t enthaltenden Glieder gestrichen werden.

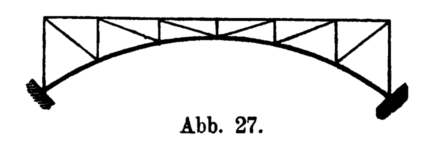


Abb. 27.

In ganz ähnlicher Weise läfst sich auch die Untersuchung des in Abb. 27 dargestellten Trägers durchführen; es liegt hier der einfachere Fall einer unbelasteten gekrümmten Gurtung vor, da es stets erlaubt ist, den Einflufs des Eigengewichts der unteren Gurtung auf die Momente M'_x zu vernachlässigen.

Von weiteren Aufgaben, für deren Lösung die hier gezeigte Behandlungsweise der Clapeyronschen Gleichungen von Nutzen ist, sei noch die genauere Berechnung des durch einen Balken verstärkten steifen Bogens erwähnt, welche der Verfasser im „Civil-Ingenieur“ 1883 veröffentlicht hat. Die im § 10 jener Abhandlung entwickelten Bedingungen (72) sind von der Form der Clapeyronschen Gleichungen, desgl. die Beziehungen (94) des § 12.

Halle a. S., Buchdruckerei des Waisenhauses.

